На правах рукописи

Янишевский Виталий Валериевич

Структура конечных SR-групп

Специальность 01.01.06 — математическая логика,
алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Ярославль — 2008

Работа выполнена на кафедре алгебры и математической логики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Казарин Лев Сергеевич

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Струнков Сергей Петрович,
НИИ системных исследований РАН

кандидат физико-математических наук, доцент
Чубаров Игорь Андреевич,
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ведущая организация:
Институт Математики и Механики УрО РАН

Защита диссертации состоится «__» ______ 2008 года в __ часов на заседании диссертационного совета Д 212.002.03 при Ярославском государственном университете им. П. Г. Демидова по адресу: 150008, г. Ярославль, ул. Союзная, 144, аудитория 426.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова.

Автореферат разослан «__» ______ 2008 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Яблокова С. И.

Общая характеристика работы

Постановка задачи и актуальность темы диссертации. Конечными SR-группами (от английского simply reducible, то есть «просто приводимыми») называются группы, все элементы которых сопряжены со своими обратными и тензорное произведение любых двух неприводимых представлений которых содержит каждое представление не более одного раза (свойство простой приводимости). Класс SR-групп впервые был введен в рассмотрение лауреатом Нобелевской премии по физике Юджином Вигнером в работах [9] и [10], в связи с интерпретацией некоторых физических задач. Вигнер показал (см. [6], §5.8, стр. 184), что для конечной группы G принадлежность к классу SR-групп эквивалентна обращению в равенство следующего неравенства, справедливого для всех конечных групп:

$$\sum_{g\in G}|\sqrt{g}|^3 \leqslant \sum_{g\in G}|C_G(g)|^2, \qquad (*)$$

где $|M|$ — мощность множества M, $\sqrt{g}=\{x\in G \mid x^2=g\}$, $C_G(g)$ — централизатор элемента g. Таким образом, класс конечных SR-групп составляют в точности те группы, которые обращают неравенство $(*)$ в равенство. В книге [2], стр. 250-251, А. И. Кострикин, в качестве нерешенной проблемы, сформулировал вопрос о SR-группах следующим образом:

> **Вопрос 1.** Как выразить в общем принадлежность к SR-классу в терминах структурных свойств группы?

В Коуровской тетради С. П. Струнковым был поставлен следующий вопрос (см. [3], стр. 61, вопрос 11.94):

> **Вопрос 2.** Будут ли SR-группы разрешимы?

Представляют интерес и возможные приложения SR-групп к алгебраической комбинаторике. Например, соответствие Макки, см. [10], сопоставляет каждому представлению ρ группы G, некоторый граф представления Γ_ρ, следующим образом. Пусть $\{\rho_1,...,\rho_t\}$ — набор неприводимых представлений группы G. Граф $\Gamma_\rho=\Gamma_\rho(G)$ — это граф с множеством вершин $\{\rho_1,...,\rho_t\}$ и с m_{jk} (направленными) ребрами из ρ_j к ρ_k, где $\rho\otimes\rho_j=\bigoplus_k m_{jk}\rho_k$. При этом, графы точных представлений SR-групп будут связными, самодуальными и без кратных ребер, что может иметь комбинаторный смысл. Далее, имеется явная параллель между определением SR-группы и определением коммутативной симметричной схемы отношений, связанной с щедро транзитивной группой подстановок (подробно см. [1], пример 2.1(1), стр. 63, а также замечание (2) стр. 116). Вопрос об орбитных кодах, связанных с SR-группами, также представляет интерес.

В работе [5] С. П. Струнков исследовал связь между целыми и полуцелыми представлениями SR-групп. Представление SR-группы называется целым, если оно реализуется в поле вещественных чисел и полуцелым в противном случае. В [5] показано, что если SR-группа G имеет хотя бы одно полуцелое представление, то центр группы G нетривиален и является элементарной абелевой 2-группой. С. П. Струнков показал, что любая полуцелая SR-группа является расширением группы порядка два, при помощи SR-группы, все представления которой целые. В работе [8] Ван Зантеном исследовались числа решений некоторых уравнений в SR-группах.

Цель работы: исследование строения конечных SR-групп.

Методы работы. В диссертации используются методы доказательств теории групп и теории характеров, в том числе теорема Классификации простых конечных групп. Для проведения вычислений в ряде случаев использовалась система компьютерной алгебры GAP, [7].

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми. Главные из них:

1. получен положительный ответ на вопрос о разрешимости конечных SR-групп при дополнительном условии отсутствия у группы композиционных факторов, изоморфных знакопеременным группам A_5 или A_6. Причем этот результат справедлив и для более широкого класса ASR-групп. Тем самым (частично) положительно решен вопрос 11.94 Коуровской тетради, [3];

2. получено описание строения бипримарных SR-групп (порядка $2^n p^m$) некоторых классов по модулю подгруппы Фраттини, среди них: группы с циклической p-силовской подгруппой, группы с диэдральной 2-силовской подгруппой, а также сверхразрешимые группы с $n \leqslant 4$;

3. определено строение SR-групп малых порядков и выделены важные серии SR-групп.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях по теории конечных групп и их представлениям, в алгебраической комбинаторике, а также в интерпретации некоторых задач теоретической физики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на всероссийской конференции «Колмогоровские чтения IV» (Ярославль, 2006), на всероссийской конференции «Колмогоровские чтения V» (Ярославль, 2007), на международной алгебраической конференции «Классы групп, алгебр и их приложения» посвященной 70-летию со дня рождения Л. А. Шеметкова, (Гомель, Беларусь, 2007), на международной алгебраической конференции посвященной 100-летию со дня рождения Д. К. Фаддеева (Санкт-Петербург, 2007).

Публикация результатов. Материал диссертации был опубликован в цикле работ, состоящем из 4 статей (в том числе 1 статья в журнале из списка рекомендованных ВАК РФ), и 2 тезисов докладов. Из 4 статей 2 написаны без соавторов, 2 — двумя авторами (Казарин Л. С., Янишевский В. В.). Все совместные работы написаны в нераздельном соавторстве. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, оглавления, четырех глав (30 параграфов), приложения, заключения и списка литературы из 39 наименований. Текст диссертации изложен на 114 страницах.

Содержание диссертации

Общая структура диссертации. Диссертация разбита на главы, которые в свою очередь подразделяются на параграфы. Нумерация всех результатов (теорем, лемм, следствий, предложений), а также определений сквозная внутри параграфа и состоит из трех цифр: первая цифра — номер главы, вторая — номер параграфа и третья — порядковый номер внутри параграфа. Формулы и таблицы имеют сквозную внутри всей диссертации нумерацию.

Глава 1. Введение. Во введении обосновывается актуальность проблемы, делается постановка задачи, приводится краткий обзор уже известных результатов. Более подробно описывается вероятная связь SR-групп с алгебраической комбинаторикой. Далее следует содержание диссертации, а также обзор полученных в ней результатов.

Глава 2. Предварительные сведения. Данная глава носит вспомогательный характер. В ней формулируются основные определения и результаты, используемые в диссертации. В параграфе

§2.1 изложены сведения теоретико-группового характера. Приведены некоторые леммы о полупрямых произведениях, даны определения центрального произведения, π-длины группы, определение подгруппы Картера, цикла Зингера.

В параграфе §2.2 приводятся сведения из теории представлений и теории характеров. Вводится понятие индуцированного характера, характера Стейнберга простой неабелевой группы лиева типа, закон взаимности Фробениуса. Приводятся основные формулировки теории Клиффорда, сведения о характерах знакопеременной группы A_n, в частности т.н. «формула крюков».

В параграфе §2.3 содержатся важные предложения об оценке классового числа простых неабелевых групп произвольного лиева ранга, и более сильные оценки классового числа для групп $L_n^{\varepsilon}(q)$, где $n \leqslant 6$. В конце параграфа §2.3 приводится неравенство Галлахера, дающее верхнюю и нижнюю оценку для классового числа группы через индекс и классовое число ее подгруппы, а также оценка числа неприводимых характеров нормальной подгруппы конечной группы через классовое число. Приведены оценки максимального порядка разрешимой подгруппы в симметрической группе подстановок S_n.

В начале параграфа §2.4 излагаются сведения о простых неабелевых группах: некоторые изоморфизмы, порядки, оценки классового числа, порядки групп внешних автоморфизмов, степени характера Стейнберга групп лиева типа. Для групп $L_n^{\varepsilon}(q)$, $B_n(q)$, $C_n(q)$ при небольших n и q вычислены точные значения классового числа. Кроме того, приводится таблица характеров группы $PGL_2(q)$, где q нечетно и группы $L_2(q)$, где q четно.

Глава 3. Вещественные группы. В параграфе §3.1 сформулировано понятие вещественной группы — группы в которой любой элемент сопряжен со своим обратным. Делается замечение, что группы нечетного порядка, отличные от тривиальной, не могут быть вещественными, и также, что среди абелевых групп вещественной будет только элементарная абелева 2-группа. Параграф §3.2 содержит важный результат Берггрена о том, что подгруппа Картера (максимальная нильпотентная подгруппа, совпадающая со своим нормализатором) вещественной группы является 2-силовской подгруппой. В параграфах §3.1, §3.2, §3.3 можно найти утверждения о вложимости некоторых классов конечных групп в вещественные группы. Поскольку симметрическая группа S_n вещественна для любого n, то любую конечную группу можно вложить в вещественную. Менее очевидно, что любую разрешимую группу можно вложить в разрешимую вещественную группу. Этот результат Берггрена приведен в §3.2. В параграфе §3.3 доказано несколько простых утверждений о вещественных 2-группах. В параграфе §3.4 устанавливается строение вещественных групп, содержащих абелеву подгруппу индекса 2:

Теорема 3.4.2. Пусть G — вещественная группа, A — ее абелева подгруппа, причем $|G : A| = 2$. Тогда $G \cong G_0 \times E$, где $G_0 \in \{E_{2^n} \wr C_2, D(A), Q^{(\mu)}(A)\}$, E — элементарная абелева 2-группа.

Здесь $Q^{(\mu)}(A)$ есть группа, являющаяся кватернионным аналогом обобщенно диэдральной группы. Точное определение этой группы дается в параграфе §3.4.

Глава 4. Некоторые классы SR-групп. Глава 4 посвящена различным классам бипримарных SR-групп (как уже было замечено выше, группы нечетного порядка не являются вещественными, поэтому речь идет о группах порядка $2^n p^m$). В параграфе §4.1 формулируется определение SR-группы, понятие целой (все представления таких групп реализуются в поле вещественных чисел) и полуцелой SR-группы (остальные группы). Делается замечание, что факторгруппа SR-группы также является SR-группой. Приводится результат Стрункова о том, что центр всякой полуцелой SR-группы нетривиален и является элементарной абелевой 2-группой. Формулируется неравенство Вигнера.

В параграфе §4.2 изложено описание SR-групп с абелевой подгруппой индекса 2. А именно, любая такая группа является вещественной группой с абелевой подгруппой индекса 2, описание которых дано выше, в теореме 3.4.2.

Список известных SR-групп, приводимых в различных источниках, весьма беден. Результаты параграфа §4.3 существенно расширяют этот перечень. Они выделяют некоторые полезные серии SR-групп. В частности, оказывается, что бипримарные SR-группы с циклической p-силовской или диэдральной 2-силовской подгруппой играют заметную роль в описании всех SR-групп малых порядков. Параграф §4.3 содержит перечисление SR-групп порядков 2^n и $2^n \cdot 3$, где $n \leqslant 7$, а также всех несверхразрешимых SR-групп порядка не больше 2000 с тривиальным центром. Этот результат был установлен в результате вычислений в системе компьютерной алгебры GAP. Большинство приведенных SR-групп имеют простое строение, вроде (центрального) произведения некоторого числа обобщенно диэдральных групп. Однако, имеются и группы, не укладывающиеся в схему. Для них приведено задание в виде образующих и определяющих соотношений, обсуждается их строение.

Параграф §4.4 содержит классификацию сверхразрешимых SR-групп порядков $2^k p^n$, где $1 \leqslant k \leqslant 4$. Доказана

Теорема 4.4.1. Пусть G — сверхразрешимая SR*-группа порядка $2^k p^n$ с силовской 2-подгруппой порядка не больше 8 и $\Phi(G) = 1$. Тогда G — прямое произведение* SR*-групп, каждая из которых имеет абелеву подгруппу индекса не больше 2.*

Следствие 4.4.2 устанавливает, что аналог теоремы 4.4.1 справедлив для случая групп G с $\Phi(G) = 1$ и 2-силовской подгруппой порядка 16.

В параграфе §4.5 устанавливается строение бипримарных SR-групп (порядка $2^n p^m$) с циклической p-силовской подгруппой по модулю подгруппы Фраттини. Вначале вводится определение особенной группы, как группы G вида $V \rtimes D_{2p^m}$, где $V \cong E_{2^n}$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, причем $Z(G) = 1$. Доказывается

Лемма 4.5.3. Пусть $G = E_{2^n} \rtimes D_{2p^m}$ — особенная группа. Группа G является несверхразрешимой SR*-группой тогда и только тогда, когда либо $(n, m) = (2k, 1)$, где $p = 2^k + 1$ — простое число Ферма, либо $(n, m) = (6, 2)$ и $p = 3$.*

Главный результат параграфа §4.5:

Теорема 4.5.2. Пусть G — конечная несверхразрешимая SR*-группа порядка $2^n p^m$ с циклической p-силовской подгруппой. Если $\Phi(G) = 1$, то $G \cong M \times E$, где M — особенная* SR*-группа, $p = 2^k+1$ — простое число Ферма; E — некоторая элементарная абелева 2-группа.*

Параграф §4.6 устанавливает строение бипримарных SR-групп с диэдральной 2-силовской подгруппой по модулю подгруппы Фраттини. Вводится определение атомарной группы, как группы G вида $V \rtimes D_{2^n}$, где $V \cong E_{p^m}$ — минимальная нормальная подгруппа группы G, причем $Z(G) = 1$, $p > 2$, $n \geqslant 3$, $m \geqslant 1$. Устанавливается

Лемма 4.6.4. Пусть $G \cong E_{p^m} \rtimes D_{2^n}$ — атомарная группа. Группа G является несверхразрешимой SR*-группой тогда и только тогда, когда $m = 2$ и $n = q + 1$, где $p = 2^q - 1$ — простое число Мерсенна.*

Главный результат параграфа §4.6:

Теорема 4.6.2. Пусть G — конечная несверхразрешимая SR*-группа порядка $2^n p^m$ с диэдральной 2-силовской подгруппой. Если $\Phi(G) = 1$, то либо $G \cong E_{p^2} \rtimes D_{2^{q+1}}$ — атомарная* SR*-группа, $p = 2^q - 1$ — простое число Мерсенна, либо $G \cong S_4$.*

Доказательство теоремы 4.6.2 сводит общую ситуацию к изучению атомарных SR-групп и SR-групп G со свойством $G/O_3(G) \cong S_4$. В последнем случае устанавливается, что если $G/O_3(G) \cong S_4$ и G — SR-группа, то $O_3(G) = 1$. Первое впечатление от знакомства с примерами SR-групп наводит на мысль, что силовские p-подгруппы такой группы для нечетного p должны быть абелевыми. Работа с группами малого порядка позволила установить, что это не так. Параграф §4.6 содержит пример SR-группы с неабелевой p-силовской (p — простое число Мерсенна) подгруппой:

Теорема 4.6.6. Пусть $P = E^+_{p^3}$, где $p = 2^q - 1$ — простое число Мерсенна. Тогда существуют такие два автоморфизма $t, \tau \in Aut(P)$, что: 1) $o(t) = 2^q$, $o(\tau) = 2$, $t^\tau = t^{-1}$; 2) $G = P \rtimes \langle t, \tau \rangle$ — *несверхразрешимая* SR-*группа.*

Здесь $E^+_{p^3}$ — неабелева группа порядка p^3 и экспоненты p.

Глава 5. Разрешимость конечных ASR**-групп.** Уже начальные исследования неразрешимых групп и имеющихся таблиц характеров простых неабелевых групп показали, что нередко для исключения соответствующей группы из списка возможных SR-групп оказывалось достаточным посмотреть на разложение тензорного квадрата характера Стейнберга. При этом вещественность группы не играла большой роли. Поэтому логично было предполагать, что разрешимость группы будет вытекать из «простой приводимости» уже тензорных квадратов неприводимых представлений. Следствием явилось введения понятия ASR-группы:

Определение 5.1.1. Конечная группа G называется ASR*-группой, если тензорный квадрат любого неприводимого представления этой группы разлагается в сумму неприводимых представлений группы G с кратностями, не превосходящими единицы.*

Очевидно, данное определение обобщает понятие SR-группы. Примеры, показывающие, что данное обобщение не является чисто формальным и действительно расширяет класс SR-групп, приводятся в Приложении. В частности, есть примеры неабелевых ASR-групп, не являющихся SR-группами. После этого формулируется основной результат, касающийся ASR-групп:

Теорема 5.1.3. Пусть группа G является неразрешимой ASR*-группой наименьшего порядка. Тогда G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N, являющуюся прямым произведением $m > 1$ групп, изоморфных A_5 или A_6. Подгруппа M группы G, состоящая из элементов, нормализующих каждую минимальную нормальную подгруппу группы N, нормальна в G и фактор-группа G/M — разрешимая* ASR*-подгруппа симметрической группы S_m, действующая транзитивно на множестве минимальных нормальных подгрупп группы N.*

Следствием теоремы 5.1.3 является следующая

Теорема 5.1.2. Конечная ASR*-группа, не содержащая композиционных факторов, изоморфных группе A_5 или A_6, разрешима.*

Поскольку, как показано в лемме 5.3.2, для всех неабелевых ASR-групп выполняется неравенство $|G| < k(G)^3$, то вопрос о том, какие неабелевы простые группы обладают свойством $|G| < k(G)^3$, представляет самостоятельный интерес. Теорема, описывающая строение простых неабелевых групп с указанным условием доказана в параграфе §5.2:

Теорема 5.2.1. Пусть G — простая неабелева группа, у которой $|G| < k(G)^3$. Тогда G изоморфна простой группе $L_2(q)$ для четного q.

В доказательстве теоремы 5.2.1 (в котором большая доля вычислений относится к наиболее трудным случаям групп $L_n^{\varepsilon}(q)$ и группам $B_n(q)$ и $C_n(q)$) используются сведения из параграфов §2.2, §2.3, §2.4.

В §5.3 рассмотрены некоторые общие свойства, касающиеся строения ASR-групп и минимального контрпримера к теореме 5.1.3. В частности, показано, что минимальный контрпример к теореме 5.1.3 будет иметь единственную минимальную нормальную подгруппу N с разрешимой факторгруппой, являющуюся прямым произведением изоморфных простых неабелевых групп с некоторыми ограничениями на степени неприводимых представлений. В следующем параграфе §5.4, исключаются почти все простые группы, которые могут встретиться в качестве композиционных факторов группы N. Оставшийся набор групп состоит из семейств $L_3(q)$, $U_3(q)$ для небольших значений q и бесконечного семейства групп $L_2(q)$. В §5.5 излагаются необходимые сведения о соответствии неприводимых характеров группы G, обладающей нормальной подгруппой, характеров этой подгруппы и характеров, индуцированных с этой подгруппы (теория Клиффорда). Используя указанную технику, задача сводится к случаю, когда композиционные факторы группы N изоморфны одной из групп семейства $L_2(q)$. В §5.6 изложены сведения о характерах групп $PGL_2(q)$ и действии группы автоморфизмов этой группы на множестве характеров степени $q+1$. Наконец, в §5.7 доказывается теорема 5.1.3, а с ней и теорема 5.1.2.

Глава 6. Приложение. Вычисления в системе GAP**.** Приложение содержит подробности вычислений в системе компьютерной алгебры GAP. В параграфах §6.1, §6.2 приводится описание системы GAP и тех функций, которые особенно часто использовались в вычислениях. Далее следуют примеры составленных функций таких, как проверка является ли заданная (как некоторая структура данных) группа SR-группой, а также функций отыскания задания группы в виде образующих и соотношений.

В параграфах §6.3, §6.4, показывается каким образом были сделаны вычисления в GAP, использовавшиеся при доказательстве теоремы 4.6.2 и леммы 5.4.3 диссертации.

Система GAP содержит библиотеку `SmallGroups`, состоящую из структур данных, представляющих конечные группы небольшого порядка. А именно, всех конечных групп порядка до 2000, кроме групп порядка 1024. Команда обращения к группе в этой библиотеке выглядит так: `G:=SmallGroup(m,n)`, где m — порядок группы, а n — ее номер среди множества групп порядка m. Имеется и «обратная» команда `IdSmallGroup(G)`, позволяющая получить набор чисел $[m, n]$ по заданной каким-либо образом группе G. Это позволило получить все SR-группы некоторых порядков. Так, в параграфах §6.5 и §6.6 приводятся таблицы содержащие значения функции `IdSmallGroup` и типы изоморфизмов всех SR-групп порядков 2^n, $1 \leqslant n \leqslant 9$, и $2^n \cdot 3$, $1 \leqslant n \leqslant 7$ соответственно.

В параграфе §6.7 приводится таблица, содержащая информацию о всех несверхразрешимых SR-группах, порядка не большего 2000 с $Z(G) = 1$. Всего таких групп 58.

Параграф §6.8 посвящен примерам групп, иллюстрирующим введенное понятие ASR-группы и его соотношение с понятием SR-группы.

Глава 7. Заключение. Заключение содержит гипотезы, формулировки которых обобщают полученные в диссертации результаты. Эти гипотезы могут служить ориентирами для дальнейших исследований по SR-группам.

Список цитируемой литературы

[1] Баннаи, Э. Ито, Т. Алгебраическая комбинаторика. Схемы отношений / Э. Баннаи. Т. Ито. — М.: Мир, 1987.

[2] Кострикин, А.И. Введение в алгебру, часть 3. Основные структуры алгебры / А.И. Кострикин. — М.: Физ.-мат. лит., 2000.

[3] Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп. Издание 16-е, дополненное, включающее Архив решенных задач / Новосибирск: ИМ СО РАН, 2006.

[4] Маккей, Д. Графы, особенности и конечные группы, / Д. Маккей // Успехи математических наук. 1983. т. 38, вып. 3 (231), С. 159-164.

[5] Струнков, С.П. О расположении характеров просто приводимых групп / С.П. Струнков // Математические заметки. 1982. т. 31, №3. С. 357-362.

[6] Хамермеш, М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам / М. Хамермеш. — М.: Мир, 1966.

[7] The GAP Group, GAP — Groups, Algorithms and Programming, Version 4.4.10, Aachen, St. Andrews, 2008; `http://www.gap-system.org`

[8] Van Zanten, A.J. De Vries, E. Number of roots of certain equations in finite simply reducible groups. / A.J. Van Zanten. E. De Vries // Groningen University, Netherlands, Physica, 1970. Vol. 49. p. 536-548.

[9] Wigner, E.P. On representations of finite groups / E.P. Wigner // Amer. J. Math., 1941. Vol. 63. p. 57-63.

[10] Wigner, E.P. On the Matrices which Reduce the Kronecker Products of Representations of S.R. Groups. / E.P. Wigner. Princeton, 1951.

Работы автора по теме диссертации

Публикации в издании, рекомендованном ВАК РФ:

[1] Казарин, Л.С. Янишевский, В.В. О конечных просто приводимых группах / Л.С. Казарин. Янишевский В.В. // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 6. С. 86-116.

Другие публикации:

[2] Казарин, Л.С. Янишевский, В.В. SR-группы порядка $2^n p$ / Л.С. Казарин. Янишевский В.В. // Сборник научных работ «Математика в Ярославском университете», посвященный 30-летию математического факультета ЯрГУ. — Ярославль: ЯрГУ, 2006. С. 257-262.

[3] Янишевский, В.В. SR-группы порядка $2^n p^m$ с циклической p-силовской подгруппой / В.В. Янишевский. // Вестник Пермского Университета: Математика. Механика. Информатика. 2007. № 7 (12). С. 39-43.

[4] Янишевский, В.В. SR-группы порядка $2^n p^m$ с диэдральной 2-силовской подгруппой / В. В. Янишевский. // Моделирование и анализ информационных систем. 2007. т. 14. № 2. С. 17-23.

[5] Янишевский, В.В. Несверхразрешимые SR-группы порядка $2^n p^m$ / В.В. Янишевский. // Тезисы докладов международной алгебраической конференции «Классы групп, алгебр и их приложения» посвященной 70-летию со дня рождения Л.А. Шеметкова, 9-11 июля 2007 г. — Гомель, Беларусь. С. 141-142.

[6] Казарин, Л.С. Янишевский, В.В. О просто приводимых группах / Л.С. Казарин. В.В. Янишевский. // Тезисы докладов международной алгебраической конференции посвященной 100-летию со дня рождения Д.К. Фаддеева, 24-29 сентября 2007 г. — Санкт-Петербург. С. 38-39.

Подписано в печать 02.04.2008. Формат 60x84 1/16.
Усл. печ. л. 1,0. Тираж 120 экз. Заказ №46
Отпечатано в ООО «Аверс плюс»
150040, г. Ярославль, пр. Октября, 34/21.